МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОИ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

БИЛЕТЫ ПИСЬМЕННЫХ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В МФТИ (2001 г.)

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

МОСКВА 2001

УДК 53 (075)
ББК 22 3

Билеты письменных вступительных экзаменов в МФТИ (2001 г) Методические разработки по физике и математике — М МФТИ, 2001 — 63 с

Приведены задания, предлагавшиеся на вступительных экзаменах абитуриентам Московского физико-технического института в 2001 году Все задачи снабжены ответами, часть — подробными решениями, некоторые — основными указаниями к решению На выполнение каждой экзаменационной работы давалось 4,5 часа

Для абитуриентов МФТИ и других физических вузов, а также преподавателей школ с углубленным изучением физики и математики

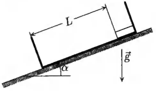
Авторы задач

по физике	доценты Чешев Ю В , Можаев В В , Шеронов А А , Чивилев В И
по математике	проф Шабунин М И , доценты Бунаков А Э , Трушин В Б , к ф м н Балашов М В , к ф м н Константинов Р В

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1

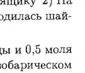
1. Ящик с шайбой удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30°$ (см рис) Ящик и шайбу одновременно отпускают и ящик начинает скользить по наклонной плоскости, а шайба — по дну ящика Через время $t = 1$ с шайба ударяется о нижнюю стенку ящика Коэффициент трения скольжения между шайбой и ящиком $\mu_1 = 0{,}23$, а между ящиком и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0{,}27$ Масса ящика вдвое больше массы шайбы 1) Определить ускорение шайбы относительно наклонной плоскости при скольжении шайбы по ящику 2) На каком расстоянии L от нижней стенки ящика находилась шайба до начала движения?



к задаче 1

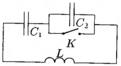
2. В цилиндре под поршнем находятся 0,5 моля воды и 0,5 моля пара Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе, так что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT градусов Сколько тепла было подведено к системе «жидкость–пар» в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = \nu\ 3RT$ (R — газовая постоянная)

3. Батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ подключена к удерживаемым неподвижно пластинам 1 и 3 плоского конденсатора Площадь пластин S, расстояние между ними d Посредине между этими пластинами расположена закрепленная неподвижно металлическая пластина 2, на которой находится заряд Q Пластину 1 отпускают Какую работу совершит батарея к моменту соударения пластин 1 и 2? Силой тяжести и внутренним сопротивлением батареи пренебречь



к задаче 3

4. При замкнутом ключе K в LC контуре (см рис) происходят незатухающие свободные колебания тока В тот момент, когда напряжение на конденсаторе C_1 максимально и равно U_1, ключ размыкают Определить максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа Параметры элементов схемы указаны на рисунке



к задаче 4

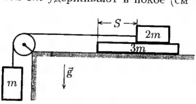
5. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1{,}5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом $R = 10$ см Через такую линзу рассматривается точечный источник света S, расположенный на расстоянии $a = R/2$ от плоской поверхности полушара На каком расстоянии от этой поверхности наблюдатель видит изображение источника света?

к задаче 5

Указание Для малых углов α $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 2

1. Систему из груза массой m, бруска массой $2m$ и доски массой $3m$ удерживают в покое (см рис) Брусок находится на расстоянии $S = 49$ см от края доски Систему отпускают и брусок движется по доске, а доска — по горизонтальной поверхности стола Коэффициент трения скольжения между бруском и доской $\mu_1 = 0{,}35$, а между доской и столом $\mu_2 = 0{,}10$ 1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске 2) Через какое время брусок достигнет края доски? Считать, что за время опыта доска не достигает блока



к задаче 1

Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать

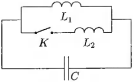
2. В цилиндре под поршнем находится один моль ненасыщенного пара при температуре T Пар сжимают в изотермическом процессе, так что в конечном состоянии половина его массы сконденсировалась, а объем пара уменьшился в $k = 4$ раза Найти молярную теплоту конденсации пара, если в указанном процессе от системы «жидкость–пар» пришлось отвести количество теплоты Q $(Q > 0)$

У к а з а н и е пар можно считать идеальным газом Работа, совершаемая в изотермическом процессе ν молями пара при расширении от объема V_1 до V_2 равна $\nu RT \ln(V_2/V_1)$

3. Одну из пластин плоского конденсатора, заряженную положительным зарядом q_1, удерживают на расстоянии d от другой закрепленной пластины с отрицательным зарядом q_2 Площадь каждой пластины S Верхнюю пластину массой M отпускают Чему будет равна ее скорость после абсолютно упругого отскока на прежнее расстояние d?

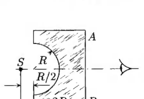
к задаче 3

4. При разомкнутом ключе K в LC-контуре (см рис) происходят незатухающие свободные колебания тока В тот момент, когда ток в цепи максимален и равен I_0, замыкают ключ K Определить максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа Параметры схемы указаны на рисунке



к задаче 4

5. В стеклянной пластине толщиной $a = 2R$ вырезана половина шара радиуса $R = 10$ см Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$ Наблюдатель рассматривает через получившуюся толстую линзу точечный источник света S, располо-



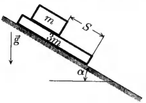
к задаче 5

ложенный на расстоянии $5R/2$ от плоской поверхности AB (см рис) На каком расстоянии от поверхности AB он видит изображение источника?

Указание для малых углов α $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 3

1. Доску с находящимся на ней бруском удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 60°$ (см рис) Расстояние от бруска до края доски $S = 49$ см Доску и брусок одновременно отпускают, и доска начинает скользить по наклонной плоскости, а брусок по доске Коэффициент трения скольжения между бруском и доской $\mu_1 = 0{,}30$, а между доской и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0{,}40$ Масса доски в три раза больше массы бруска 1) Определить ускорение бруска относительно наклонной плоскости при скольжении бруска по доске 2) Через какое время брусок достигнет края доски?

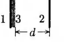


к задаче 1

2. В цилиндре под поршнем находится половина моля ненасыщенного пара Содержимое цилиндра медленно охлаждают в изобарическом процессе, так что часть пара конденсируется ($\nu_ж = 1/3$), а температура внутри цилиндра уменьшается на ΔT ($\Delta T > 0$) Определить молярную теплоту конденсации пара, если в этом процессе пришлось отвести от содержимого цилиндра количество тепла Q ($Q > 0$) Пар можно считать идеальным газом с внутренней энергией ν молей $U = \nu\ 3RT$

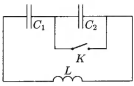
3. К неподвижным пластинам 1 и 2 плоского конденсатора подключена батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ К пластине 1 прижата проводящая пластина 3 Пластину 3 отпускают, и она начинает двигаться к пластине 2 Какую работу совершит батарея за время перемещения пластины 3 от пластины 1 к пластине 2, если площадь каждой пластины равна S, а начальное расстояние

между пластинами 2 и 3 равно d? Силой тяжести пренебречь



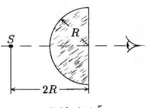
к задаче 3

4. В колебательном контуре, изображенном на рисунке, происходят свободные колебания при замкнутом ключе K В тот момент, когда напряжение на конденсаторе C_1 достигает максимального значения и равно V_0, ключ размыкают Определить величину тока в контуре в тот момент, когда напряжение на конденсаторе C_1 будет равно нулю при условии, что $C_2 > C_1$



к задаче 4

5. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1{,}5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом $R = 10$ см Через такую линзу рассматривается точечный источник света S, расположенный на расстоянии $a = 2R$ от плоской поверхности полушара На каком расстоянии от этой поверхности наблюдатель видит источник света?

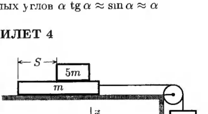


к задаче 5

Указание для малых углов α $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 4

1. Систему из доски массой m, бруска массой $5m$ и груза массой $3m$ удерживают в покое (см рис) Затем систему отпускают, и доска движется по горизонтальной поверхности стола, а брусок движется по доске Через время $t = 1{,}4$ с



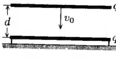
к задаче 1

брусок достигает края доски, а доска еще не доходит до блока Коэффициент трения скольжения бруска о доску $\mu_1 = 0{,}10$, а доски о стол $\mu_2 = 0{,}30$ 1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске 2) На каком расстоянии от края доски находился брусок до начала движения? Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать

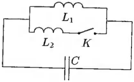
2. В цилиндре под поршнем находятся один моль воды и один моль пара при температуре T К содержимому цилиндра подводится тепло в изотермическом процессе, так что объем, занимаемый паром в конечном состоянии увеличивается в $k = 3$ раза Найти количество теплоты, подведенной в этом процессе Молярная теплота испарения жидкости при указанной температуре равна Λ Газовая постоянная – R Объемом, занимаемым жидкостью вначале, пренебречь Пар можно считать идеальным газом

У к а з а н и е Работа, совершаемая ν молями пара в изотермическом процессе при расширении от объема V_1 до объема V_2, равна $\nu RT\ln(V_2/V_1)$

3. Одна из пластин плоского конденсатора, на которой находится заряд q, неподвижно закреплена на непроводящей плите Вторая пластина с зарядом q и массой M удерживается на расстоянии d от нее Площадь каждой пластины S Верхней пластине сообщают такую начальную скорость v, что она долетает до нижней пластины и после абсолютно упругого удара отскакивает от нее Чему будет равна скорость этой пластины, когда она снова будет находиться на расстоянии d от нижней пластины?



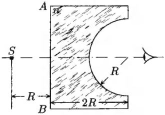
к задаче 3



к задаче 4

4. В колебательном контуре, изображенном на рисунке, происходят свободные колебания при разомкнутом ключе K В тот момент, когда ток в катушке индуктивностью L достигает максимального значения, равного I_0, ключ размыкают Определить величину напряжения на конденсаторе в тот момент, когда ток через катушку L будет равен нулю при условии, что $L_2 > L_1$

5. В стеклянной пластине толщиной $a = 2R$ вырезана половина шара радиуса $R = 10$ см Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$ Наблюдатель рассматривает через получившуюся толстую линзу точечный источник света S, расположенный на расстоянии R от плоской поверхности AB (см рис) На каком расстоянии от поверхности AB он видит изображение источника?

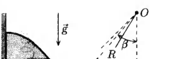


к задаче 5

Указание для малых углов α $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 5

1. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка, упирающаяся в гладкую вертикальную стенку (см рис) Участок AB профиля горки — дуга окружности радиусом R По направлению к горке движется со скоростью U небольшая по сравнению с размерами горки монета массой m Монета въезжает на горку, движется по горке без трения, не отрываясь от нее, и достигает точки K, продолжая движение Радиус OK составляет с вертикалью угол

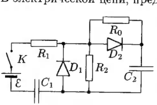


к задаче 1

β ($\cos\gamma = 5/7$) 1) Найти скорость монеты в точке K 2) Найти силу давления горки на стенку в момент прохождения монетой точки K

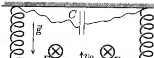
2. Температура гелия увеличивается в $k = 1{,}5$ раза в процессе $PV^2 = \text{const}$ (P — давление газа, V — его объем) При этом внутренняя энергия газа изменилась на $\Delta U = 300$ Дж Найти 1) минимальное давление $P_{\min}$, 2) начальный объем газа V_1 Максимальное давление, которое было у газа в этом процессе, составило $P_{\max} = 9\ 10^5$ Па

3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды D_1 и D_2 идеальные Считая параметры элементов цепи известными, определить 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K, 2) количество теплоты, выделившееся в схеме после замыкания ключа K Внутренним сопротивлением батареи пренебречь



к задаче 3

4. Проводник массой M и длиной l подвешен к непроводящему потолку за концы с помощью двух одинаковых проводящих пружин, каждая жесткостью k К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкостью C Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости конструкции Проводник сместили и отпустили При прохождении положения равновесия скорость проводника оказалась равной v_0 Определить максимальную высоту подъема проводника от положения равновесия Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь



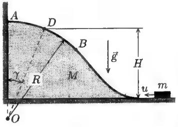
к задаче 4

5. Точечный источник света находится на главной оптической

оси на расстоянии $a = 40$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 8$ см Источник сместили вверх на расстояние $h = 5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

БИЛЕТ 6

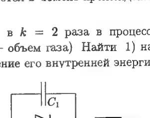
1. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка массой M, упирающаяся в гладкую вертикальную стенку (см рис) Участок AB профиля горки — дуга окружности радиусом R По направлению к горке движется со скоростью U небольшой по сравнению с размерами горки брусок массой m Брусок въезжает на горку и движется по горке без трения, не отрываясь от нее, и достигает точки D на высоте $H = R/2$, продолжая движение Радиус OD составляет с вертикалью угол γ ($\cos\gamma = 3/4$) 1) Найти скорость бруска в точке D 2) Найти силу давления горки на стол в момент прохождения бруском точки D



к задаче 1

2. Температура гелия уменьшается в $k = 2$ раза в процессе $P^2V = \text{const}$ (P — давление, V — объем газа) Найти 1) начальный объем газа V_1, 2) изменение его внутренней энергии в процессе охлаждения Начальное давление газа $P_1 = 10$ Па, а минимальный объем, который он занимал в процессе охлаждения, составил $V_{\min} = 1$ л

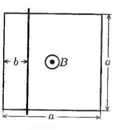
3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды



к задаче 3

D_1 и D_2 идеальные Известные параметры элементов цепи указаны на рисунке 1) Определить ЭДС батареи, если ток через нее сразу после замыкания ключа K равен I_0 2) Определить количество теплоты, выделившейся в схеме после замыкания ключа K Внутренним сопротивлением батареи пренебречь

4. На горизонтальной поверхности стола закреплена тонкая неподвижная проводящая квадратная рамка со стороной a На рамке симметрично лежит стержень параллельно боковым сторонам рамки на расстоянии $b = a/4$ Рамка и стержень изготовлены из одного куска провода, омическое сопротивление единицы длины которого равно ρ В некоторый момент включается однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки Какую скорость приобретет стержень за время установления магнитного поля, если установившееся значение индукции равно B_0? Смещением стержня за время установления магнитного поля пренебречь Трение не учитывать Масса стержня M



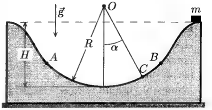
к задаче 4

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d = 40$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см Источник сместили вверх на расстояние $h = 5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

БИЛЕТ 7

1. На горизонтальной поверхности стола покоится чаша с небольшой по сравнению с размерами чаши шайбой массой m (см рис) Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R Глубина чаши $H = 3R/5$, ее внутренняя поверхность гладкая Шайба начинает скользить

без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остается ■ покое Шайба достигает точки C, для которой угол между радиусом OC и вертикалью

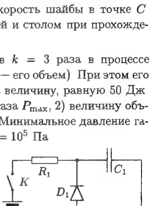


к задаче 1

равен α ($\cos\alpha = 4/5$) 1) Найти скорость шайбы в точке C 2) Найти силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C

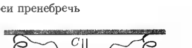
2. Температура гелия уменьшается в $k = 3$ раза в процессе $PV^2 = \text{const}$ (P — давление газа, V — его объем) При этом его внутренняя энергия изменилась на величину, равную 50 Дж Найти 1) максимальное давление газа $P_{\max}$, 2) величину объема газа $V_к$ ■ конечном состоянии Минимальное давление газа ■ этом процессе составило $P_{\min} = 10^5$ Па

3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды D_1 и D_2 идеальные Считая параметры элементов цепи известными, определить 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K, 2) найти количество теплоты, выделившейся в схеме после замыкания ключа K Внутренним сопротивлением батареи пренебречь



к задаче 3

4. Проводник массой M и длиной l подвешен к непроводящему потолку за концы с помощью двух одинаковых проводящих пружин, каждая жесткостью k К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емко-



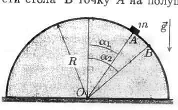
к задаче 4

стью C Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной плоскости конструкции Проводник смещают вниз на расстояние h от положения равновесия, а затем отпускают Определить скорость проводника, когда он снова окажется в положении равновесия Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $a = 8$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см Источник сместили вниз на расстояние $h = 4$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

БИЛЕТ 8

1. Полушар радиусом R покоится на горизонтальной поверхности стола В точку A на полушаре помещают небольшую по сравнению с размерами полушара шайбу массой m и отпускают (см рис) Шайба скользит без трения и оказывается в точке B, а полушар при этом остается неподвижным Радиусы OA и OB составляют с вертикалью углы α_1 и α_2 такие что $\cos\alpha = 5/6$ $\cos\alpha_2 = 2/3$ 1) Найти скорость шайбы в точке B 2) Найти силу трения между полушаром и столом при прохождении шайбой точки B

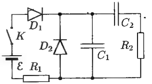


к задаче 1

2. Температура гелия увеличилась в $k = 3$ раза в процессе $P^2V = \text{const}$ (P — давление V объем газа), а его внутренняя энергия изменилась на 100 Дж Найти 1) начальный объем V_1 газа, 2) начальное давление P_1 газа Максимальный объем, который занимал газ в процессе нагрева, равнялся $V_{max} = 3$ л

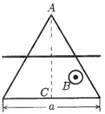
3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды D_1 и D_2 идеальные Известные параметры элементов электрической цепи указаны на рисунке 1) Определить ЭДС батареи,

если ток через нее сразу после замыкания ключа K равен I_0 2) Определить количество теплоты, выделившейся в схеме, после замыкания ключа K Внутренним сопротивлением батареи пренебречь



к задаче 3

4. На горизонтальной поверхности стола закреплена тонкая проводящая рамка в виде равностороннего треугольника со стороной a На рамке лежит стержень, который параллелен основанию треугольника, а середина стержня находится на середине высоты АС Рамка и стержень изготовлены из одного куска провода, омическое сопротивление единицы длины которого равно ρ В некоторый момент включается однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки Какую скорость приобретает стержень за время установления магнитного поля, если установившееся значение индукции равно B_0? Смещением стержня за время установления магнитного поля пренебречь Трение не учитывать Масса стержня M

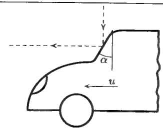


к задаче 4

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $a = 60$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = -15$ см Линзу сместили вверх на расстояние $L = 2$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси На сколько и куда надо сместить источник, чтобы его изображение вернулось в старое положение?

БИЛЕТ 9

1. Во время града автомобиль едет со скоростью и $= 25$ км/час по горизонтальной дороге Одна из градин ударяется о переднее (ветровое) стекло автомобиля, наклоненное под углом

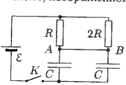


к задаче 1

$a = 30^\circ$ к вертикали, и отскакивает горизонтально в направлении движения автомобиля (см рис) Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что скорость градины непосредственно перед ударом вертикальна, найти скорость градины 1) до удара, 2) после удара

2. Легкий подвижный теплонепроводящий поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части В нижней части под поршнем находятся в равновесии жидкость и ее пар, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0 В верхней части цилиндра над поршнем находится газообразный гелий К гелию квазистатически подводится некоторое количество теплоты, и он совершает работу A При этом часть пара сконденсировалась, и от пара с водой пришлось отвести количество теплоты Q 1) Какое количество теплоты было подведено к гелию? 2) Найти удельную теплоту испарения жидкости Молярная масса пара μ Трением и теплоемкостью поршня пренебречь Считать, что объем жидкости значительно меньше объема образовавшегося из нее пара

3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсаторы не заряжены Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа K? Сопротивлением перемычки пренебречь Параметры схемы указаны на рисунке

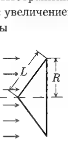


к задаче 3

4. С помощью рассеивающей линзы получено изображение спички расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1/2$ По другую сторону линзы на

расстоянии $a = 9$ см от нее перпендикулярно главной оптической оси линзы установили плоское зеркало. Изображение спички в системе «линза–зеркало» получилось с увеличением $\Gamma = 1/4$. Определить фокусное расстояние линзы.

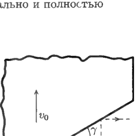
5. На деталь космического аппарата в форме прямого кругового конуса с радиусом основания $R = 20$ см и образующей $L = 25$ см падает солнечный свет параллельно оси конуса (см. рис.). Интенсивность света (мощность, проходящая через единицу площади плоской поверхности, ориентированной перпендикулярно световым лучам) $I = 1{,}4$ кВт/м^2. С какой силой свет действует на деталь? Считать, что деталь отражает свет зеркально и полностью.



к задаче 5

БИЛЕТ 10

1. Массивная плита поднимается вверх с постоянной скоростью. Мяч, брошенный вертикально вверх, нагоняет плиту, ударяется абсолютно упруго о боковую поверхность плиты, наклоненную под углом $\gamma = 30°$ к горизонту, и отскакивает в горизонтальном направлении со скоростью $V_2 = 1{,}7$ м/с (см. рис.). 1) Найти скорость плиты V_0. 2) Найти скорость V_1 мяча непосредственно перед ударом. Масса плиты намного больше массы мяча.

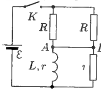


к задаче 1

2. Легкий подвижный теплонепроницаемый поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части. В нижней части под поршнем находятся в равновесии пар и вода, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0. Над поршнем находится ν молей газообразного гелия. К гелию подвели квазистатически количество теплоты Q. В результате его температура увеличилась, а часть па-

ра сконденсировалась. 1) Найти изменение температуры гелия. 2) Сколько теплоты необходимо при этом отвести от пара и воды? Удельная теплота испарения воды λ, молярная масса пара μ. Трением и теплоемкостью поршня пренебречь. Считать, что объем сконденсировавшегося пара значительно больше объема образовавшейся из него воды.

3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут. Катушка с индуктивностью L обладает омическим сопротивлением r. Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.



к задаче 3

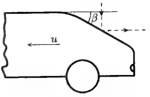
4. С помощью положительной линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см получено мнимое изображение иголки, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 2$. По другую сторону линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало. Изображение иголки в системе «линза–зеркало» получилось с увеличением $\Gamma_2 = 3$. Определить расстояние от линзы до зеркала.

5. На полупрозрачное зеркало площадью $S = 100$ см^2, находящееся на орбите искусственного спутника Земли, падают солнечные лучи перпендикулярно поверхности зеркала. Зеркало отражает в обратном направлении 30% и пропускает в прямом направлении 20% энергии падающего света, а остальную энергию поглощает. Найти силу, действующую на зеркало со стороны света. Расстояние от Земли (зеркала) до Солнца $R = 150 \cdot 10^6$ км. Мощность излучения Солнца $N = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

БИЛЕТ 11

1. Идет град, и автомобиль едет со скоростью $U = 29$ км/час по горизонтальной дороге. Одна из градин ударяется о стекло заднего окна автомобиля, наклоненное под углом $\beta = 30^\circ$ к

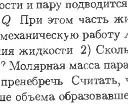
горизонту, и отскакивает горизонтально в направлении, противоположном движению автомобиля (см рис) Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что ее скорость непосредственно перед ударом вертикальна, найти скорость градины 1) до удара, 2) после удара



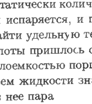
к задаче 1

2. Легкий неподвижный теплонепроводящий поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части Под поршнем находятся в равновесии жидкость и ее пар, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0 Над поршнем находится газообразный гелий К жидкости и пару подводится квазистатически количество теплоты Q При этом часть жидкости испаряется, и пар совершает механическую работу A 1) Найти удельную теплоту испарения жидкости 2) Сколько теплоты пришлось отвести от гелия? Молярная масса пара μ Теплоемкостью поршня и трением пренебречь Считать, что объем жидкости значительно меньше объема образовавшегося из нее пара

3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсаторы не заряжены Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа K? Сопротивлением перемычки пренебречь Параметры схемы указаны на рисунке



к задаче 3



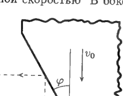
к задаче 5

4. С помощью рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см получено изображение гвоздика, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1/3$ По другую сторону линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало Изображение гвоздика в системе «линза–зеркало» получилось с увеличением $\Gamma = 1/6$ Определить расстояние от линзы до зеркала

5. Призма (см рис) отклоняет параллельный пучок света на угол α ($\cos\alpha = 7/9$) Мощность пучка $N = 30$ Вт Найти силу, с которой свет действует на призму Отражением и поглощением света призмой пренебречь

БИЛЕТ 12

1. Кабина подъемника движется вертикально вниз с постоянной скоростью В боковую стенку кабины, наклоненную под углом $\varphi = 30°$ к вертикали, попадает брошенный вертикально вверх мяч (см рис) После абсолютно упругого удара мяч отскакивает в горизонтальном направлении со скоростью $V_2 = 3{,}4$ м/с 1) Найти скорость кабины V_0 2) Найти скорость мяча V_1 непосредственно перед ударом Масса кабины намного больше массы мяча

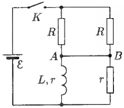


к задаче 1

2. Легкий неподвижный теплонепроводящий поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части Под поршнем в нижней части цилиндра находятся в равновесии вода и пар, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0 В верхней части цилиндра над поршнем находится газообразный гелий 1) Какое количество теплоты надо подвести квазистатически к пару и воде чтобы часть воды массой Δm испарилась? 2) Сколько тепла необходимо при этом отвести от гелия? Удельная теплота

испарения воды λ, молярная масса пара μ Трением и теплоемкостью поршня пренебречь Считать, что объем пара значительно больше объема воды, из которой он образовался

3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут Катушка с индуктивностью L обладает омическим сопротивлением r Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь Параметры схемы указаны на рисунке



к задаче 3

4. С помощью положительной линзы на экране получено изображение булавки, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1$ Между линзой и экраном на расстоянии $a = 10$ см от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало Изображение булавки в системе «линза–зеркало» получилось с увеличением $\Gamma = 2$ Определить фокусное расстояние линзы

5. Лампочка излучает изотропно световую энергию мощностью $N = 40$ Вт На расстоянии $R = 1$ м от лампочки, перпендикулярно световым лучам, расположено небольшое полупрозрачное зеркальце площадью $S = 1$ см Зеркальце отражает в обратном направлении 20% и поглощает 30% энергии падающего света, а остальную энергию пропускает в прямом направлении С какой силой свет действует на зеркальце?

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{x+y+1} + 7\cdot 3^{y-2} = 8, \\ \sqrt{x+y^2} = x+y \end{cases}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\sin x} + \sin^2 x \cos 3x = 6\cos 2x \cos^2 x$$

3. Решить неравенство
$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2-x-2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

4. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что D лежит на отрезке AC. Найти AB, CD и радиус окружности, если $BC = 4$, $BD = 3$, $\angle BAC = \arccos\frac{1}{3}$.

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $S \neq A$, $AB = BS$. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, $\angle DAB = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{37}{3}}$. Точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер AD, BD, CD соответственно.
Найти: 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1,
2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1,
3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

БИЛЕТ 2

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{x+y+1} + 7 \quad 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x + y^2} = x + y \end{cases}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x$$

3. Решить неравенство
$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 - 3x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

4. Через точку A проведены две прямые одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD Найти AC, BC и радиус окружности, если $BD = 5$, $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\angle BDC = \arccos \sqrt{\frac{5}{21}}$

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S В точку S сажают муравья Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$ Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно
Найти 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1,
2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1,
3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1

БИЛЕТ 3

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 5^{x+y+1} + 16 \quad 5^{y-2} = 10, \\ \sqrt{x + y^2} = x + y \end{cases}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x = 6 \cos 2x \sin^2 x$$

3. Решить неравенство
$$\frac{1}{4 - \sqrt{x^2 - 2x - 8}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2 + 12}}$$

4. Через точку A проведены две прямые одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что D лежит на отрезке AC Найти AD, CD и радиус окружности, если $AB = 3\sqrt{11}$, $BC = 8$ и $\angle ABD = \arcsin \frac{3}{4}$

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $AB = 2BS$, точка B лежит между A и S В точку S сажают муравья Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно $8\sqrt{10}$, $\angle ADB = \arcsin \frac{\sqrt{111}}{20}$ Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно
Найти 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1,
2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1,
3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1 BA_1 и CB_1

БИЛЕТ 4

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{x+y+1} + 16 \cdot 3^{y-3} = 10, \\ \sqrt{2x + y^2} = x + y \end{cases}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x + 6 \cos 2x \sin^2 x = 0$$

3. Решить неравенство
$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 + 3x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}}$$

4. Через точку A проведены две прямые одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что C лежит на отрезке AD Найти AB, BC и радиус окружности, если $CD = 1$, $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle BCD = \arccos\sqrt{\frac{2}{11}}$

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость Точка F лежит на ребре CD и $2DF = FC$, точка S лежит на прямой AB, $AB = 3BS$ и точка B лежит между A и S В точку S сажают муравья Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно 20, $\angle DAB = \arcsin\frac{\sqrt{13}}{5}$ Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно
Найти 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1,
2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1,
3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1

БИЛЕТ 5

1. Решить уравнение
$$\sqrt{2x^2 + 4x - 23} - \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 1$$

2. Решить уравнение
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 4|\sin x|$$

3. Решить неравенство
$$\log_{(2x+9)}\left(24 + 2x - x^2\right) + \log_{\sqrt{24+2x-x^2}}(2x + 9) \leqslant 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 4$ и $AC = 2$, проведены биссектриса AA_1, медиана BB_1 и высота CC_1 Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) AC, AA_1 и CC_1, 2) AA_1, BB_1 и CC_1

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 18y \leqslant 0, \\ 2x + 3 - 2xy \leqslant 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус шара, касающегося всех четырех шаров внешним образом.

БИЛЕТ 6

1. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2$

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$

3. Решить неравенство

$$\log_{(20-2x)}\left(99 - 2x - x^2\right) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20 - 2x) \leqslant 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) BB_1, CC_1 и BC, 2) AA_1, BB_1 и CC_1.

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 3xy + 1 \leqslant 0, \\ 9x^2 - 12x - 8y \leqslant 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

БИЛЕТ 7

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 46} - \sqrt{x^2 - 6x + 22} = 3$$

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = 4|\cos x|$$

3. Решить неравенство

$$\log_{(x+3)}\left(6 + x - x^2\right) + \log_{\sqrt{6+x-x^2}}(x + 3) \leqslant 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 4$ и $AC = 2$, проведены медиана AA_1, биссектриса BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) AB, AA_1 и BB_1, 2) AA_1, BB_1 и CC_1

5. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 8x \leqslant 0, \\ xy + y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус сферы, такой, что все четыре шара касаются ее внутренним образом

БИЛЕТ 8

1. Решить уравнение
$$\sqrt{2x^2 - 8x + 49} - \sqrt{x^2 - 4x + 21} = 4$$

2. Решить уравнение
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

3. Решить неравенство
$$\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4} - x - x^2\right) + \log_{\sqrt{\frac{99}{4}-x-x^2}}\left(\frac{13}{2} - x\right) \leqslant 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены биссектриса AA_1, высота BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) AB, AA_1 и BB_1, 2) AA_1, BB_1 и CC_1

5. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3 \leqslant 0, \\ y^2 + 6y + 18x \leqslant 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наибольшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом

БИЛЕТ 9

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+5x+6} < 1+\sqrt{x^2+x+1}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x+\cos x}{\sin 4x+\sin 3x-\sin 2x-\sin x} = \frac{\sqrt{2}|1-2\sin^2 x|}{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{6}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{6}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2=\sqrt{70}$ Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 Через точку B_2 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2 Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2

4. Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол равный $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$ Точки E, F K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так что $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FD}=\frac{SK}{KC}=\frac{1}{2}$ Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK, 2) расстояние от точки D до плоскости EFK, 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK

5. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_5(x+\sqrt{2-a})+\log_{1/5}(a-1-x)=\log_{25}9$$

имеет решение

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-6y+4z+xy=0, \\ 3x-5y+z-y^2=0 \\ x-4y-2z-yz=0 \end{cases}$$

БИЛЕТ 10

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x+3} < 1 + \sqrt{x^2-2x+2}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$ Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 Через точку B_1 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2 Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный $\operatorname{arctg} 4$ Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB AD и SC так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3}$ Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK, 2) расстояние от точки D до плоскости EFK, 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK

5. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_3(x+\sqrt{5-a}) + \log_{1/3}(a-2-x) = \log_9 4$$

имеет решение

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0 \end{cases}$$

БИЛЕТ 11

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-5x+6}<1+\sqrt{x^2-x+1}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x-\cos 3x+\cos 2x-\cos x}{\sin 4x-\sin 3x-\sin 2x+\sin x}=\frac{\sqrt{2}|2\cos^2 x-1|}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{6}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{6}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2=\sqrt{70}$ Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1\in C_1$, $B_1\in C_1$, $A_2\in C_2$, $B_2\in C_2$, точки A_2 и B_2 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 Через точку B_1 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2 Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1

4. Высота правильной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 3, угол между соседними боковыми ребрами равен $\arccos\frac{9}{10}$ Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}=\frac{CK}{SC}=\frac{1}{3}$ Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK, 2) расстояние от точки D до плоскости EFK, 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK

5. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_2(x+\sqrt{3-a})+\log_{1/2}(a+1-x)=\log_4 9$$

имеет решение

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x+y+2z-x^2=0,\\10x-3y-3z+xz=0,\\16x-y+z-xy=0\end{cases}$$

БИЛЕТ 12

1. Решить неравенство
$$\sqrt{x^2-4x+3}<1+\sqrt{x^2+2x+2}$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin 4x-\sin 3x-\sin 2x+\sin x}{\cos 4x-\cos 3x+\cos 2x-\cos x}=\frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2=2\sqrt{13}$ Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1\in C_1$, $B_1\in C_1$, $A_2\in C_2$, $B_2\in C_2$, точки A_2 и B_2 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 Через точку B_2 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2 Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 — в точке B Найти A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковая грань образует с основанием угол, равный $\operatorname{arctg} 2$ Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FD}=\frac{CK}{KS}=2$ Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK, 2) расстояние от точки D до плоскости EFK, 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK

5. Найти все a, при которых уравнение
$$\log_4(x+\sqrt{4-a})+\log_{1/4}(a+2-x)=\log_{16}9$$
имеет решение

6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 6x-5y+9z-2y^2=0,\\ x-2y+4z-2xy=0,\\ 4x-y+z-2yz=0 \end{cases}$$

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1

1. 1) $a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) \approx 2{,}9$ м/с^2 2) $L = \frac{3}{4}(\mu_2 - \mu_1)gt^2\cos\alpha = 25$ см

2. $Q_{13} = \frac{A}{2} + 4R\Delta T$

3. $A = \left(\frac{Q}{2} + \frac{3\varepsilon\mathcal{E}}{d}\right)\mathcal{E}$

4. $J_m = U_1\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}}$

5. $x = \frac{Rn^2}{2+n-n^2} = 18$ см

БИЛЕТ 2

1. $a_1 = 9/10 \approx 0{,}98$ м/с^2, $t\sqrt{3} = 1{,}7$ с

Решение На брусок со стороны доски действует сила трения скольжения $F_1 = 2\mu mg$, направленная вправо. Применяя второй закон Ньютона к грузу и к бруску, найдем их ускорение

$$a_1 = (l - 2m)g/3 = g/10 = 0{,}98 \text{ м/с}^2$$

Заметим, что движение доски не влияет на ускорение a_1. Это связано с тем, что при движущейся и закрепленной доске сила трения F_1 между доской и бруском одна и та же. Рассмотрим движение доски. На нее действуют две горизонтальные силы: направленная влево сила трения F_1 со стороны бруска и направленная вправо сила трения $F_2 = 5\mu_2 mg$ со стороны стола. Ускорение доски

$$a_2 = (F_1 - F_2)/3m = (2\mu_r - 5\mu_2)g/3 = g/15 < a_1$$

Ускорение бруска относительно доски

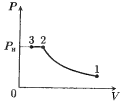
$$a = a_1 - a_2 = (l - 4\mu_1 + 5\mu_2)g/3 = g/30$$

С этим ускорением брусок пройдет относительно доски путь S за время

$$t = (2S/a)^{1/2} = (6S/(l - 4\mu_1 + 5\mu_2)g)^{1/2} = \sqrt{3} \text{ с } = 1{,}7\text{с}$$

2. $\Lambda = 2(Q - RT\ln 2)$

Р е ш е н и е При изотермическом сжатии ненасыщенного пара его давление растет, пока не станет равным давлению насыщенного пара $P_н$ При дальнейшем сжатии давление и температура пара не меняются Изменение объема происходит



к задаче 2

за счет конденсации массы пара Δm (см рис) В процессе изменения давления на участке 1–2 над паром была совершена работа величиной $\nu RT\ln(V_1/V_2)$ В процессе конденсации 2–3 от пара необходимо отвести теплоту конденсации $\Lambda\nu/2$ По условию $Q = \nu RT\ln(V_1/V_2) + \Lambda\nu/2$, где Λ — молярная теплота конденсации Чтобы найти отношение объемов V_1/V_2, заметим что при конденсации в процессе 2–3 давление и температура постоянны Объем изменится в два раза так, что половина пара сконденсировалась $V_2/V_3 = 2 = k/2$ По условию $V_1/V_3 = k$, следовательно, $V_1/V_2 = k/2$ Итак,

$$Q = \nu RT\ln(k/2) + \Lambda\nu/2,$$

$$\Lambda = 2/3(Q - \nu RT\ln(k/2)) = 2(Q - RT\ln 2)$$

3. $v = \frac{q_1 + q_2}{2}\sqrt{\frac{d}{\varepsilon_0 MS}}$

Р е ш е н и е После отскока верхней пластины от нижней заряд на каждой пластине будет равен $q = (q_1 - q_2)/2$ Работа электрического поля до столкновения пластин $A_1 = q_1q_2d/2\varepsilon_0S$ Работа поля за время подъема верхней пластины до прежнего уровня $A_2 = (q_1 - q_2)^2d/8\varepsilon_0S$ По закону сохранения энергии суммарная работа поля равна кинетической энергии верхней пластины после отскока на прежнее расстояние

$$A_1 + A_2 = Mv^2/2$$

После подстановки выражений для A_1 и A_2 получим, что

$$v = (q_1 + q_2)\sqrt{d/\varepsilon_0 MS}/2$$

4. $U_{\max} = I_0\sqrt{\frac{L_1L_2}{C(L_1 + L_2)}}$

Решение Сразу после замыкания ключа K напряжение на конденсаторе остается равным нулю Сохраняются и токи в катушках через катушку L_1 течет ток I_0, а в катушке L_2 ток равен нулю Затем начинает нарастать ток через катушку L_2 Пусть в некоторый момент ток через катушку L_1 равен I_1, а через катушку L_2 ток равен I_2 Пусть токи в катушках текут по часовой стрелке Запишем закон Ома для контура, охватывающего обе катушки

$$L_1 dI_1/dt + L_2 dI_2/dt = 0$$

Отсюда следует, что $L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const}$ Очевидно, что константа равна $L_1 I_0$, поэтому

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = L_1 I_0$$

В тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально и равно $U_{\max}$ ток через конденсатор равен нулю, а через катушки будет течь ток, который обозначим через I_m Тогда

$$(L_1 + L_2) I_m = L_1 I_0$$

Отсюда

$$I_m = L_1 I_0/(L_1 + L_2)$$

В момент замыкания ключа энергия контура сосредоточена в катушке L_1 и равна

$$W_1 = L_1 I_0^2/2$$

А в тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально, энергия, запасенная в контуре, равна

$$W_2 = (L_1 + L_2) I_m^2/2 + C u_{\max}^2/2$$

По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2$$

$$L_1 I_0^2/2 = (L_1 + L_2) I_m^2/2 + C u_{\max}^2/2$$

Отсюда

$$U_{\max} = I_0 \sqrt{L_1 L_2 / C(L_1 + L_2)}$$

5. $L = \dfrac{(6n-1)R}{(3n-1)n} = 15$ см

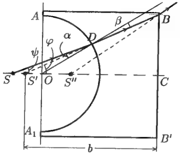
Решение Определим положение изображения источника S', даваемое преломляющей поверхностью AA_1 Ввиду

малости преломляющих углов имеем

$$\alpha/\beta = n$$

(см рис) Из теоремы синусов для треугольника $OS'D$

$$(b - 2R)/\beta = R/\varphi$$



к задаче 5

Аналогично для треугольника OSD

$$R/2\alpha = R/\psi,$$

откуда $\psi = 2\alpha$ или

$$\varphi = \psi - \alpha = 3\beta n - \beta$$

Решая второе уравнение относительно b, получаем

$$b = (6n - 1)R/(3n - 1)$$

Определим положение изображения источника S'' при преломлении на границе BB' Очевидно, что $S''C = b/n$ Окончательно

$$S''C = (6n - 1)R/(3n - 1)n = 15 \text{ см}$$

БИЛЕТ 3

1. 1) $a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) = 7$ м/с^2

2) $t = \sqrt{\dfrac{3S}{2(\mu_2 - \mu_1)g\cos\alpha}} \approx 1{,}2$ с

2. $A = 3Q - 6R\Delta T$

3. $A = \dfrac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{d}$

4. $I = v_0\sqrt{\dfrac{C_1}{L}\ \dfrac{(C_2 - C_1)}{C_2}}$

5. $y = \dfrac{2R}{n(2-n)} = 26{,}7$ см

БИЛЕТ 4

1. 1) $a_1 = \mu_1 g = 0{,}98$ м/с^2 2) $L = \dfrac{3}{4}(1 - 3\mu_1 - 2\mu_2)gt^2 \approx 72$ с

2. $Q = \Lambda\nu_{ж} + 2RT\ln\dfrac{3}{2}$

3. $v = v_0\sqrt{1 + \dfrac{(q_1 - q_2)^2 d}{4\varepsilon_0 SMv_0^2}}$

4. $v = I_0\sqrt{\dfrac{L_1}{C}\ \dfrac{(L_2 - L_1)}{L_2}}$

5. $x = \dfrac{R(n^2 - 2)}{n^2 + n - 1} = 0{,}9$ см

БИЛЕТ 5

1. 1) $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{7}gR}$ 2) $F = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}m\left(\dfrac{v_0^2}{R} + \dfrac{g}{7}\right)$

2. 1) $P_1 = P_{\min} = \dfrac{P_{\max}}{k^2} = 4\ 10^5$ Па 2) $V_1 = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{k^2}{k-1}\,\dfrac{\Delta U}{P_{\max}} = 1$ л

$(\Delta U = \nu\,\frac{3}{2}RT_1(k-1))$

3. 1) $J = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1}$ 2) $Q = \dfrac{C_1\mathcal{E}^2}{2}$

4. $H = v_0\sqrt{\dfrac{M + (Bl)^2 C}{2k}}$

5. $L = \dfrac{hF}{a} = 1$ см

БИЛЕТ 6

1. 1) $v = u^2 - gR$ 2) $F = Mg + \dfrac{3}{4m}\left(\dfrac{7}{4}g - \dfrac{u^2}{R}\right)$

Решение По закону сохранения энергии

$$mu^2/2 = mv^2/2 + mgh$$

Отсюда с учетом того, что $H = R/2$ находим скорость шайбы в точке D

$$v = \sqrt{u^2 - gR}$$

Для ответа на второй вопрос найдем сначала силу давления шайбы на горку в точке D Запишем уравнение движения шайбы в проекции на направление DO

$$mg\cos\gamma - N = mv^2/R$$

Отсюда с учетом полученного выражения для v

$$N - m(7/4g - u^2/R)$$

По третьему закону Ньютона шайба давит на горку с такой же силой N в направлении DO На горку еще действует направленная вертикально вниз сила тяжести Mg, горизонтально направленная сила давления со стороны стенки и вертикально направленная сила F со стороны стола Горка в покое и поэтому

$$F = Mg + N\cos\gamma$$

С учетом полученного ранее выражения для N имеем

$$F = Mg + 3/4m(7/4g - u^2/R)$$

По третьему закону Ньютона горка давит на стол с такой же силой F, но направленной вертикально вниз

2. 1) V_1 - 1 л 2) $\Delta U = \dfrac{P_1V_1C_v(1-k)}{kR} = -75$ Дж

Решение Из уравнения процесса $PV = \text{const}$ и уравнения состояния $PV = RT$ находим, что в указанном процессе имеет место $TV = \text{const}$ По условию температура уменьшается (газ охлаждается), значит объем V газа растет Следовательно, минимальный объем у газа был в начальном состоянии, где $V_1 = V_{\min} = 1$ л Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \nu C_v(T_2 - T_1),$$

где по условию $T_2 = T_1/k$ Начальную температуру газа T_1 можно найти из уравнения состояния

$$P_1V_1 = \nu RT_1$$

Таким образом,

$$\Delta U = \nu C_v T_1(1/k - 1) = P_1 V_1 C_v(1 - k)/kR = -75 \text{ Дж}$$

3. 1) $\mathcal{E} = I_0(R_1 + R_2)$ 2) $Q = \frac{C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)^2}{2}$

Р е ш е н и е В момент замыкания ключа K разность потенциалов на конденсаторах C_1 и C_2 равна нулю, а диод D_2 заперт Следовательно, батарея замкнута на два последовательно соединенных резистора сопротивлением $R_1 + R_2$ Таким образом, согласно закону Ома ЭДС батареи равна

$$\mathcal{E} = I_0(R_1 + R_2)$$

В установившемся режиме разности потенциалов на резисторах равны нулю, диод D_1 открыт, а диод D_2 закрыт Разность потенциалов на конденсаторе C_1 равна нулю Поэтому напряжение на конденсаторе $C_2 U_{C_2} = \mathcal{E}$ Заряд конденсатора C_2 равен

$$q = C_2\mathcal{E} = C_2 I_0(R_1 + R_2)$$

Работа, совершенная батареей в процессе зарядки конденсаторов, равна

$$A = q\mathcal{E} = C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)^2$$

Энергия, полученная электрической системой, равна

$$W = q^2/2C_2 = C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)/2$$

Из закона сохранения энергии

$$A = W + Q,$$

где Q — выделившееся тепло Очевидно, что

$$Q = C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)^2/2$$

4. $v = \frac{a^2 B_0^2}{31\rho M}$

Р е ш е н и е Рассмотрим произвольный момент времени в процессе установления магнитного поля В этот момент в рамке и стержне текут токи, которые изображены на рис Из условия непрерывности тока следует, что

$$I_2 = I + I_1$$

Закон Ома для контура $ACDFA$ имеет вид

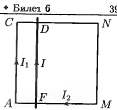
$$a^2/4\Delta B/At = 3/2\rho a I_1 - \rho a I$$

Аналогичный закон для контура $FDNMF$ позволяет записать

$$3/4a^2\Delta B/At = 5/2\rho aI_2 + \rho aI$$

Из совместного решения предыдущих трех уравнении получим, что

$$I = 2a/31\rho\Delta B/\Delta t$$



к задаче 4

Сила Ампера, действующая на стержень DF,

$$F_a = IaB = 1a^2/31\rho B\Delta B/\Delta t$$

Импульс силы, подействовавший на стержень за время установления индукции магнитного поля, очевидно, равен импульсу стержня, который он приобрел за это время

$$F_a dt = a^2/31\rho d(B^2) = a^2B_0^2/31\rho = Mv$$

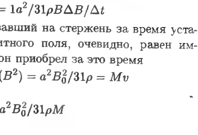
Отсюда

$$v = a^2B_0^2/31\rho M$$

5. $L = \frac{hF}{d} = 1{,}25$ см

Решение До смещения источника S' по формуле линзы найдем расстояние b от изображения источника до линзы

$$1/d + l/b = -1/F$$



к задаче 5

Огсюда

$$b = dF/(d + F) = 8 \text{ см}$$

Источник, его изображение и оптический центр линзы всегда лежат на одной прямой Поэтому проведем прямую через смещенный источник S'' и его изображение (точка B) На рис это прямая $S''B$ Точка O' является новым оптическим центром линзы Следовательно, линзу надо сместить вниз на расстояние OO', которое обозначим через L Расстояние L найдем из подобия треугольников $S'S''B$ и BOO'

$$L/h = b/(d - b)$$

Отсюда

$$L = bh/(d-b) = hF/d = 1{,}25 \text{ см}$$

БИЛЕТ 7

1. 1) $v = \sqrt{\frac{gR}{5}}$ 2) $F_{\text{тр}} = mg\left(2\frac{H}{R} - 2 + 3\cos\alpha\right)\sin\alpha = \frac{24}{25}mg$

2. 1) $P_{\max} = k^2 P_{\min} = 9 \quad 10^5$ Па 2) $V_2 = \frac{2}{3}\frac{\Delta V}{k-1}\frac{1}{P_{\min}} = 0{,}17$ л

3. 1) $J = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$ 2) $Q = \frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}^2$

4. $v = h\sqrt{\frac{2k}{M + (Bl)^2 C}}$

5. $L = \frac{hF}{a} = 6$ см

БИЛЕТ 8

1. 1) $v = \sqrt{\frac{gR}{3}}$ 2) $F_{\text{тр}} = mg\frac{\sqrt{5}}{g}$?

2. 1) $V_1 = \frac{V_{\max}}{k^2} = \frac{1}{3}$ л 2) $P_1 = \frac{2}{3}\frac{k^2}{k-1}\frac{\Delta V}{V_{\max}} = 10^5$ Па

3. 1) $\mathcal{E} = J_0 R_1$ 2) $Q = \frac{(C_1 + C_2)J_0^2 R_1^2}{2}$

4. $v = \frac{a^2\sqrt{3}B_0^2}{112\rho M}$

5. $h = \frac{La}{F} = 8$ см

БИЛЕТ 9

1. 1) $v_1 = u\sqrt{3} \approx 12$ м/с 2) $v_2 = 3u \approx 21$ м/с

2. 1) $Q_{\text{г}} = \frac{5}{2}A$ 2) $\lambda = \frac{Q}{A\mu}RT_0$

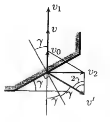
3. $Q = \frac{C\mathcal{E}}{3}$

4. $F = 2a\frac{\Gamma}{\Gamma_1 - \frac{3}{2}\Gamma} = 36$ см

5. $F = 2\pi\frac{R^4}{CL^2}I \approx 7{,}5 \quad 10^{-7}H$

БИЛЕТ 10

1. 1) $v_0 = \frac{v_2}{\sqrt{3}} = 1$ м/с 2) $v_1 = v_2\sqrt{3} = 3$ м/с



к задаче 1

Решение Перейдем в систему отсчета, связанную с плитой В этой системе отсчета скорость мяча $v = v_1 - v_0$ и направлена вертикально вверх (см рис), составляя угол γ с нормалью к поверхности плиты (угол падения) Относительно плиты мяч отскочит со скоростью $v' = v$ под углом отражения, равным углу падения γ Векторное сложение относительной скорости v' и скорости плиты v_0 даст скорость v_2 мяча относительно Земли (см рис) Имеем

$$v_0 = v_2/\operatorname{tg} 2\gamma = v_2/\sqrt{3} = 1 \text{ м/с},$$
$$v = v_2/\sin 2\gamma,$$
$$v_1 = v + v_0 = v_2/\operatorname{tg}\gamma = v_2\sqrt{3} = 3 \text{ м/с}$$

2. 1) $\Delta T = \frac{2Q}{5\nu R}$ 2) $Q_1 = \frac{2\mu_п \lambda Q}{5RT_0}$

Решение Давление насыщенного пара зависит только от температуры, которая по условию в нижней части поддерживается постоянной Следовательно, давление пара и давление гелия остается в процессе постоянным (гелий отделен от пара подвижной перегородкой) При увеличении температуры гелия в процессе с постоянным давлением подведенное тепло Q идет на увеличение внутренней энергии и совершение работы гелием против силы давления пара

$$Q = \nu C_v(T_2 - T_1) + P(V_2 - V_1) = \nu(C_V + R)(T_2 - T_1)$$

Итак, для гелия

$$\Delta T = Q/\nu(C_v + R) = 2Q/5\nu R$$

При конденсации пара массой $\Delta m_п$ при постоянном давлении выделяется тепло в количестве $\lambda \Delta m$, которое и нужно отвести Чтобы найти массу Δm сконденсировавшегося пара, надо приравнять величину работы, совершенной гелием

$$A_г = \nu R(T_2 - T_1) = QR/(C_V + R)$$

к величине работы пара $A_п$ при постоянном давлении и температуре

$$A_п = P(V_2 - V_1) = (m_2 - m_1)RT_0/\mu_п = \Delta mRT_0/\mu_п$$

Таким образом,

$$QR/(C_V + R) = \Delta mRT_0/\mu_п,$$

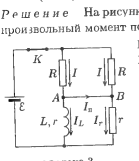
$$\Delta m = Q\mu_п/(C_v + R)T_0$$

Окончательно тепло, которое необходимо отвести от пара

$$Q_1 = \lambda\Delta m = \lambda\mu_п Q/(C_v + R)T_0 = 2\mu_п\lambda Q/5RT_0$$

3. $Q = \dfrac{\mathcal{E}L}{2r(R+r)}$

Решение. На рисунке изображены токи в участках цепи в произвольный момент после замыкания ключа K. Токи через резисторы R всегда равны. Из непрерывности тока ток через катушку



к задаче 3

$$I_L = I - I_п,$$

а ток через резистор r

$$I_r = I + I_п$$

Закон Ома для контура, содержащего катушку и резистор r, имеет вид

$$L\Delta I_L/\Delta t = (I + I_п)r - I_l r$$

После подстановки первых двух уравнений в третье получим

$$L\Delta I_L/\Delta t = (I + I_п)r - (I - I_п)r = 2rI_п$$

Из последнего уравнения следует, что

$$L\Delta I_L = 2rI_п\Delta t$$

Учитывая, что начальный ток через катушку равен нулю, а конечный равен установившемуся току $I_{уст}$, находим заряд, протекший через перемычку AB

$$LI_{уст} = 2rQ,$$

или

$$Q = LI_{уст}/2r$$

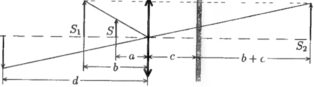
Поскольку установившийся ток через катушку

$$I_{уст} = \mathcal{E}/(R + r),$$

то заряд равен

$$Q = \mathcal{E}L/2r(R+r)$$

4. $c = \dfrac{F}{3} = 5$ см



к задаче 4

Решение Из формулы линзы (см рис)

$$1/a - 1/b = 1/F$$

при условии что $b/a = \Gamma_1$ следует, что $b = F$ Общее увеличение, даваемое системой «линза–зеркало» равно $\Gamma_2 = \Gamma_1\Gamma_1'$, где

$$\Gamma_1' = \frac{d}{b+2c}$$

Используя формулу линзы для предметов S_2 и S_3 (S_2 — изображение предмета S_1 в зеркале), получаем

$$d = \left(1 + \frac{d}{b+2c}\right)F = (1+\Gamma_1')F$$

Расстояние от линзы до изображения предмета S_3 даваемого системой

$$d = F(\Gamma_1' + 1) = (b+2c)\Gamma_1',$$

или

$$F(\Gamma_2/\Gamma_1 + 1) = (b+2c)\Gamma_2/\Gamma_1$$

Отсюда для искомого расстояния c находим

$$c = F/3 = 5 \text{ см}$$

5. $F = \frac{1{,}1NS}{4\pi R^2 c}$

Решение Мощность излучения, падающего на зеркало,

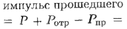
$$N_3 = NS/(4\pi R^2)$$

Импульс фотона $P_ф$ и его энергия $E_ф$ связаны соотношением

$P_ф = E_ф/c$. Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Поэтому импульс P падающего на зеркало света в единицу времени и мощность $N_з$ (энергия в единицу времени) связаны аналогично

$$P = N_з/c$$

В единицу времени импульс отраженного света $P_{отр} = 0{,}3P$, импульс прошедшего света $P_{пр} = 0{,}2P$, импульс зеркала $P_з = P + P_{отр} - P_{пр} = 1{,}1P$, поскольку по закону сохранения импульса



к задаче 5

$$P_{отр} + P_{пр} + P_з = P$$

(см. рис.). Сила на зеркало $F = P$. С учетом полученных выражений для $P_з$, P и $N_з$ находим силу F

$$F = 1{,}1NS/4\pi R^2 c$$

БИЛЕТ 11

1. 1) $v_1 = u\sqrt{3} \approx 14$ м/с. 2) $v_2 = u\left(\frac{1}{\cos 2\beta} - 1\right) = u \approx 8$ м/с

2. 1) $\lambda = \frac{RT_0}{\mu}\frac{Q}{A}$. 2) $Q_1 = A\,\frac{C_v + R}{R} = \frac{5}{2}A$

3. $Q = \frac{C\mathcal{E}}{2}$

4. $a = 2$ см

5. $F = \frac{N}{C}\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 0{,}67 \cdot 10^{-7} H$

БИЛЕТ 12

1. 1) $v_0 = \frac{v_2}{\sqrt{3}} = 2$ м/с. 2) $v_1 = v_2 \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_2}{\sqrt{3}} \approx 2$ м/с

2. 1) $Q = \lambda\Delta m$. 2) $Q_г = \frac{5}{2}RT_0\frac{\Delta m}{\mu_п}$

3. $Q = \frac{L\mathcal{E}}{3r(R+r)}$

4. $F = \frac{40}{7} \approx 5{,}7$ см

5. $F = \frac{0{,}7NS}{4\pi R^2 C} \approx 0{,}74 \cdot 10^{-12} H$

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

1. $\left(0, \log_3 \frac{36}{17}\right)$, $\left(\log_3 \frac{49}{27}, \log_3 \frac{9}{7}\right)$

Решение Возводя в квадрат обе части второго уравнения системы, получаем $x + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ или

$$x(x + 2y - 1) = 0, \tag{1}$$

откуда следует, что либо $x = 0$, либо $x = 1 - 2y$

Уравнение (1) равносильно второму уравнению исходной системы, если

$$x + y \geqslant 0 \tag{2}$$

а) Пусть $x = 0$, тогда из первого уравнения получаем

$$3^y = \frac{36}{17}, \text{ откуда } y = \log_3 \frac{36}{17}$$

Пара чисел $\left(0, \log_3 \frac{36}{17}\right)$ удовлетворяет условию (2) и является решением исходной системы

б) Пусть $x = 1 - 2y$, тогда из первого уравнения системы получаем $3^{2-y} + 7 3^{y-2} = 8$ или $t + \frac{7}{t} = 8$, где $t = 3^{2-y}$, Уравнение $t^2 - 8t + 7 = 0$ имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = 7$

Если $t = 1$, то $3^{2-y} = 1$, откуда $y = 2$, $x = -3$ Пара чисел $(-3, 2)$ не удовлетворяет условию (2)

Если $t = 7$, то $3^{2-y} = 7$, $3^y = \frac{9}{7}$, $y = \log_3 \frac{9}{7}$, $x = 1 - 2\log_3 \frac{9}{7} = \log_3 \frac{49}{27}$

Пара чисел $\left(\log_3 \frac{49}{27}, \log_3 \frac{9}{7}\right)$ удовлетворяет условию (2) и является решением исходной системы

2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Решение Из формул для $\cos 3x$ и $\sin 3x$ следует, что

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x), \qquad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

Поэтому

$$\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}(\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x) = \\ = \frac{3}{4}\sin 4x = 3\sin x \cos x \cos 2x,$$

и исходное уравнение при условии

$$\sin x \neq 0$$

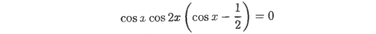
равносильно каждому из уравнений

$$3\sin x \cos x \cos 2x = 6 \sin x \cos^2 x \cos 2x,$$

$$\cos x \cos 2x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

3. $x < -2$, $x = -1$, $x > 3$

Решение. Область E допустимых значений неравенства определяется условиями $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \geqslant 0$ и $\sqrt{x^2 - x - 2} \neq 0$, т.е. E — объединение промежутков $x < -2$, $-2 < x \leqslant -1$, $2 \leqslant x < 3$, $x > 3$. Следовательно E — внешность интервала $(-1,2)$ с выброшенными точками -2 и 3 (см. рис.)



к задаче 3

Рассмотрим два возможных случая $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} < 0$ и $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} > 0$.

а) Пусть $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} < 0$, т.е.

$$2 < \sqrt{x^2 - x - 2} \tag{3}$$

На множестве E неравенство (3) равносильно каждому из неравенств $4 < x^2 - x - 2$, $(x+2)(x-3) > 0$. Поэтому числа из промежутков $x < -2$ и $x > 3$ — решения исходного неравенства, так как левая часть исходного неравенства отрицательна при условии (3), а правая положительна при всех x.

б) Пусть

$$2 > \sqrt{x^2 - x - 2} \tag{4}$$

Множество E_1 решений неравенства (4) — это множество ре-

шений системы

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ 4 > x^2 - x - 2. \end{cases}$$

Следовательно, E_1 — объединение промежутков $(-2,1]$ и $[2,3)$ На множества E_1 исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant \sqrt{x^2 + 3}$,

$$2 - \sqrt{x^2 + 3} \geqslant \sqrt{x^2 - x - 2} \qquad (5)$$

На множестве E_1 левая часть (5) отрицательна при $x \neq -1$ и равна нулю при $x = -1$ Правая часть (5) положительна при $x \in E_1$, $x \neq -1$ и равна нулю при $x = -1$ Следовательно $x = -1$ — единственное решение исходного неравенства при выполнении условия (4)

4. $AB = \dfrac{12}{\sqrt{17}}$, $CD = \dfrac{7}{\sqrt{17}}$, $R = \dfrac{3\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$

к задаче 3

Решение Обозначим $AB = x$, $AD = y$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ACB = \varphi$ Тогда $\angle ABD = \varphi$ Из подобия треугольников ABC и ABD (см рис) следует, что $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{3}{4}$, откуда $AC = \dfrac{4}{3}x$ Из треугольника ABC по теореме косинусов получаем

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\ AC\ \cos\alpha,$$

$$\text{т е } 16 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 2x\ \frac{4}{3}x\ \frac{1}{3} = \frac{17}{9}x^2,$$

откуда $AB = x = \dfrac{12}{\sqrt{17}}$

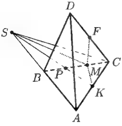
По свойству касательной и секущей $AB^2 = AD\ AC$, т е $x^2 = y\ \frac{4}{3}x$, откуда $AD = \dfrac{9}{\sqrt{17}}$ $DC = AC - AD = \dfrac{16}{\sqrt{17}} - \dfrac{9}{\sqrt{17}} = \dfrac{7}{\sqrt{17}}$

Пусть R — радиус окружности, тогда $R = \dfrac{BD}{2\sin\varphi} = \dfrac{3}{2\sin\varphi}$

Из треугольника ABD по теореме синусов имеем $\dfrac{AD}{\sin\varphi} = \dfrac{BD}{\sin\alpha}$,

где $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{AD\sin\alpha}{3} = 2\sqrt{\frac{2}{17}}$, $R = \frac{3\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$

5. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{1}{3}BC$



к задаче 5

Решение При решении задачи следует иметь в виду, что 1) кратчайший путь между двумя точками — отрезок, соединяющий эти точки, 2) для нахождения кратчайшего пути муравей должен сначала ползти в плоскости ABC по прямой до некоторой точки M ребра BC (см рис) а затем — в плоскости BDC по прямой из точки M в точку F

Задача сводится к нахождению такой точки P на ребре BC, чтобы для любой точки $M \in BC$ выполнялось неравенство

$$SM + MF \leqslant SP + PF$$

Для нахождения точки P развернем грань BDC так, чтобы отрезок BC остался на месте, а вершина D совпала с точкой A Так как $MF = MK$, где K — середина AC, то длина пути муравья равна $SM + MK$ Этот путь будет минимальным, если точки S, M и K лежат на одной прямой Точка P, в которой пересекаются отрезки BC и SK, есть точка пересечения медиан треугольника ASC и поэтому $BP = \frac{1}{3}BC$

6. 1) $\arccos\frac{11}{32}$, 2) $\frac{36}{\sqrt{301}}$ 3) 2

Решение 1) Пусть $\angle DAB = \angle DCB = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{37}{3}}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$ Если C_2 — середина отрезка DC_1, то $A_1C_2 \parallel AC_1$ и поэтому угол между прямыми BA_1 и AC_1 равен углу между прямыми BA_1 и A_1C_2

Так как $DC = \frac{BC}{2\cos\alpha} = 4\sqrt{10}$, $CC_2 = \frac{3}{4}DC = 3\sqrt{10}$, то из $\triangle BCC_2$ по теореме косинусов имеем

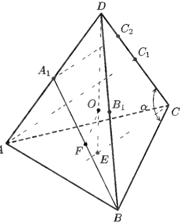
$$BC_2^2 = CC_2^2 + BC^2 - 2\ CC_2\ BC\ \cos\alpha = 102$$

Пусть $\angle C_2A_1B = \beta$ Тогда из $\triangle A_1C_2B$ по теореме косинусов находим

$$BC_2^2 = A_1B^2 + A_1C_2^2 - 2A_1B \quad A_1C_2\cos\beta,$$

где $A_1C_2 = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}A_1B$

Отрезок A_1B можно найти либо по теореме косинусов из $\triangle AA_1B$, либо с помощью равенства $4A_1B^2 + AD^2 = 2(AB^2 + DB^2)$, где $AB^2 = 48$, $AD^2 = BD^2 = DC^2 = 160$ Следовательно, $A_1B^2 = 64$, $A_1B = 8$, $A_1C_2 = 4$ и $102 = 64 + 16 - 2 \quad 8 \quad 4\cos\beta$, откуда $\cos\beta = -\frac{11}{32}$ и угол φ между прямыми BA_1 и AC_1 равен $\arccos\frac{11}{32}$



к задаче 6

2) Пусть x — расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 Тогда $x = \frac{6V_1}{BA_1 \quad AC_1 \quad \sin\varphi}$, где V_1 — объем пирамиды ABA_1C_1 Но $V_1 = \frac{1}{4}V$, где V — объем пирамиды $ABCD$

Если E — центр основания $ABCD$, то DE — высота пирамиды $ABCD$, причем $DE = \sqrt{DC^2 - EC^2}$, где $EC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 4$

Следовательно, $DE = \sqrt{160 - 16} = 12$, $V = \frac{1}{3}(AB)^2\frac{\sqrt{3}}{4} \times DE = 48\sqrt{3}$, $V_1 = 12\sqrt{3}$, $x = \frac{12 \quad \sqrt{3} \quad 6}{8 \quad 8 \quad \sin\varphi}$, где $\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{32}\right)^2} = \frac{\sqrt{903}}{12}$, $x = \frac{36}{\sqrt{301}}$

3) Пусть O — центр сферы, касающейся плоскости ABC и

отрезков AC_1, BA_1 и CB_1 Сфера касается основания пирамиды в точке E, а ее центр лежит на высоте DE пирамиды

Если F — точка касания сферы с отрезком BA_1, то $OF \perp BA_1$ и $BF = BE$ (касательные, проведенные к сфере из одной точки равны) Так как $BF = BE = EC = 4$, а $BA_1 = 8$, то F — середина BA_1 Пусть r — радиус сферы, тогда $OE = OF = r$,

$$OA_1^2 = A_1F^2 + r^2 = 16 + r^2$$

С другой стороны, по теореме косинусов из $\triangle DOA_1$ имеем

$$OA_1^2 = DA_1^2 + DO^2 - 2DA_1 \cdot DO \cdot \cos\gamma,$$

где $\gamma = \angle ADE$, $DA_1 = 2\sqrt{10}$, $DO = DE - r = 12 - r$

Но $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{1}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ Следовательно,

$$16 + r^2 = 40 + (12 - r)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot (12 - r)\frac{3}{\sqrt{10}},$$

откуда $r = 2$

БИЛЕТ 2

1. $\left(0, \log_2 \dfrac{128}{71}\right)$, $(2\log_2 7 - 6, 4 - \log_2 7)$

2. $x = \dfrac{\pi n}{2}$ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $x < -1$, $x = 0$, $x > 4$

4. $AC = 32\sqrt{\dfrac{3}{35}}$, $BC = 4\sqrt{\dfrac{6}{5}}$, $R = 3\sqrt{\dfrac{7}{10}}$

5. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$ $PB = \dfrac{2}{5}BC$

6. 1) $\arccos\dfrac{47}{121}$, 2) $\dfrac{36}{\sqrt{259}}$, 3) $\dfrac{8}{3}$

БИЛЕТ 3

1. $\left(0, \log_5 \dfrac{250}{141}\right)$, $(2\log_5 8 - 3, 2 - \log_5 8)$

2. $x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $x < -4$, $x = -2$, $x > 6$

4. $AD = \frac{99}{5\sqrt{7}}$, $CD = \frac{76}{5\sqrt{7}}$, $R = \frac{16}{5}\sqrt{\frac{11}{7}}$

5. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{4}$

6. 1) $\arccos\frac{11}{32}$, 2) $\frac{72}{\sqrt{301}}$, 3) 4

БИЛЕТ 4

1. $\left(0, \log_3\frac{270}{97}\right)$, $(2\log_3 8 - 4, 3 - \log_3 8)$

2. $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $x < -4$, $x = -3$, $x > 1$

4. $AB = \frac{6\sqrt{6}}{19}$, $BC = \frac{2\sqrt{22}}{19}$, $R = \frac{11\sqrt{3}}{38}$

5. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{9}$

6. 1) $\arccos\frac{47}{121}$, 2) $\frac{72}{\sqrt{259}}$, 3) $\frac{16}{3}$

БИЛЕТ 5

1. $x_1 = -6$, $x_2 = 4$

Решение Пусть $t = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$, тогда $2x^2 + 4x - 23 = 2t^2 - 7$, и уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{2t^2 - 7} = t + 1$$

Возводя обе части полученного уравнения в квадрат, имеем

$$2t^2 - 7 = t^2 + 2t + 1, \quad \text{или} \quad t^2 - 2t - 8 = 0,$$

откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 4$

Так как $t \geqslant 0$, то $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 4$, $x^2 + 2x - 24 = 0$, $x_1 = -6$, $x_2 = 4$ Числа x_1 и x_2 являются корнями исходного уравнения

2. $x = \pi n$, $x = \frac{2\pi}{5} + \pi n$, $x = \frac{4\pi}{5} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Решение Допустимые значения x определяются условием

$$\cos 3x \neq 0, \tag{6}$$

так как все корни уравнения $\cos x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 3x = 0$

Функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 3x$ и $|\sin x|$ — периодические функции с периодом π и поэтому достаточно найти решения исходного уравнения на промежутке $[0,\pi)$

Если $0 \leqslant x < \pi$ и выполняется условие (6), то исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 4\sin x, \quad \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} = 4\sin x,$$

$$\frac{4\sin x \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 3x} = 4\sin x, \quad \sin(\cos 2x - \cos 3x) = 0,$$

$$\sin x \quad \sin\frac{x}{2} \quad \sin\frac{5x}{2} = 0 \tag{7}$$

Все корни уравнения $\sin\frac{x}{2} = 0$ удовлетворяют уравнению $\sin x = 0$, а решения уравнения (7) задаются формулами

$$x = \pi k, \qquad x = \frac{2\pi k}{5}, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

Из множества чисел (8) промежутку $[0,\pi)$ принадлежат числа $0, \frac{2\pi}{5}$ и $\frac{4\pi}{5}$ Поэтому множество решений исходного уравнения задается формулами $x = \pi n$, $x = \frac{2\pi}{5} + \pi n$, $x = \frac{4\pi}{5} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $-4 < x < 1 - 2\sqrt{6}$, $-\sqrt{15} \leqslant x \leqslant -\frac{19}{5}$, $-3 \leqslant x \leqslant \sqrt{15}$, $1 + 2\sqrt{6} < x < 6$

Решение Область E допустимых значений неравенства определяется условиями $2x + 9 > 0$, $2x + 9 \neq 1$, $24 + 2x - x^2 = (x + 4)(6 - x) > 0$, $24 + 2x - x^2 \neq 1$ Отсюда следует, что E — интервал $(-4,6)$ с выброшенными точками $x_1 = 1 - 2\sqrt{6}$, $x_2 = 1 + 2\sqrt{6}$, где $x_1 \approx -3{,}8$, $x_2 \approx 4{,}8$

Обозначим $t = \log_{2x+9}(24 + 2x - x^2)$, тогда неравенство примет вид $t + \frac{2}{t} \leqslant 3$ или $\frac{(t-1)(t-2)}{t} \leqslant 0$, откуда следует, что либо $t < 0$ либо $1 \leqslant t \leqslant 2$

а) Пусть $t < 0$, т е

$$\log_{2x+9}(24 + 2x - x^2) < 0 \qquad (9)$$

Если $x \in E$, то $2x + 9 > 1$ и неравенство (9) на множестве E равносильно неравенству $24 + 2x - x^2 < 1$ или

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

Поэтому множество решений неравенства (9) — объединение интервалов $(-4,x_1)$ и $(x_2,6)$

б) Пусть $1 \leqslant t \leqslant 2$, т е

$$1 \leqslant \log_{2x+9}(24 + 2x - x^2) \leqslant 2 \qquad (10)$$

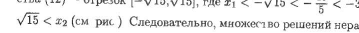
Так как $2x + 9 > 1$ на множестве E, то неравенство (10) равносильно неравенству

$$2x + 9 \leqslant 24 + 2x - x^2 \leqslant (2x + 9)^2,$$

которое равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x^2 + 34x + 57 = 5(x + 3)\left(x + \dfrac{19}{5}\right) \geqslant 0, & (11) \\ x^2 \leqslant 15 & (12) \end{cases}$$

Множество решений неравенства (11) — объединение промежутков $x \leqslant -3$ и $x \geqslant -\frac{19}{5}$, а множество решений неравенства (12) — отрезок $[-\sqrt{15},\sqrt{15}]$, где $x_1 < -\sqrt{15} < -\frac{19}{5} < -3$ $\sqrt{15} < x_2$ (см рис) Следовательно, множество решений нера-



к задаче 3

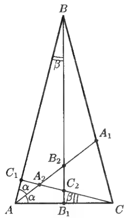
венства (10) состоит из отрезков $\left[-\sqrt{15}, -\frac{19}{5}\right]$ и $[-3,\sqrt{15}]$

4. 1) $\frac{\sqrt{15}}{10}$, 2) $\frac{\sqrt{15}}{30}$

Решение Пусть $A_2B_2C_2$ — треугольник, образованный пересечением прямых AA_1, BB_1 и CC_1 (см рис), $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \alpha$, $\angle ABB_1 = \beta$ Тогда $\angle B_1BC = \angle C_1CA = \beta$

$\sin\beta = \cos 2\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$AC_1 = AC \sin\beta = \frac{1}{2}$, $AA_2 = \frac{AC_1}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2}{5}}$



к задаче 4

1) Если S_1 — площадь треугольника AA_2C, то $S_1 = \frac{1}{2} AA_2 \cdot AC \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$

2) Если S_2 — площадь треугольника $A_2B_2C_2$, то $S_2 = \frac{1}{2} A_2B_2 \; A_2C_2 \; \sin\varphi$, где $\varphi = \angle B_2A_2C_2 = \angle C_1A_2A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и поэтому $\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ Так как $A_2B_2 = AB_2 - AA_2 = \frac{AB_1}{\cos\alpha} - \frac{AC_1}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $A_2C_2 = CC_1 - C_1A_2 - CC_2 = AC\cos\beta - AA_2\sin\alpha - \frac{B_1C}{\cos\beta} = \frac{2}{\sqrt{15}}$, то $S_2 = \frac{\sqrt{15}}{30}$

5. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Решение Складывая первое неравенство со вторым, умноженным на 2, находим $x^2 - 6xy + 9y^2 + 6(x - 3y) + 9 \leqslant 0$, или $[(x - 3y) + 3]^2 \leqslant 0$, откуда $x - 3y + 3 = 0$ Подставляя $x = 3y - 3$ в исходную систему, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 9y^2 - 18y + 9 + 9y^2 - 18y \leqslant 0, \\ 6y - 6 + 3 - 2(3y - 3)y \leqslant 0, \end{cases}$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} 2y^2 - 4y + 1 \leqslant 0, \\ 2y^2 - 4y + 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $2y^2 - 4y + 1 = 0$ Решив систему уравнений

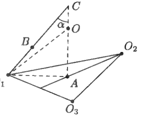
$$\begin{cases} x = 3y - 3, \\ 2y^2 - 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

найдем два ее решения, которые являются решениями исходной системы неравенств

6. $R \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) r$, $\quad \dfrac{R\left(R + r - \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r + \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} - R}$

Решение Пусть O_k — центр k-го шара радиуса r $(k = 1,2,3)$, A — центр треугольника $O_1O_2O_3$, B — точка касания шара радиуса R с одним из трех одинаковых шаров r (например, с первым), C — центр шара радиуса R, O — центр шара, касающегося всех четырех шаров (см рис), x — его радиус Тогда $O_1A = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, $O_1C = r + R$, $OC = R + x$, $OO_1 = r + x$ Точки C и O должны лежать на перпендикуляре к плоскости $O_1O_2O_3$, проведенном через точку A

Чтобы шар радиуса R касался трех равных шаров радиуса r, должно выполняться условие $O_1C \geqslant O_1A$, т е $R + r \geqslant \frac{2r}{\sqrt{3}}$ или $R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3} \geqslant 0$



к задаче 6

Обозначим $\alpha = \angle O_1CA$, тогда $\sin\alpha = \frac{2r}{\sqrt{3}(R + r)}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4r^2}{3(R + r)^2}} = \frac{b}{R + r}$, где $b = \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}$

Применяя теорему косинусов в треугольнике O_1CO, получаем

$$O_1O^2 = CO_1^2 + CO^2 - 2 \cdot CO_1 \cdot CO \cdot \cos\alpha, \text{ т е}$$

$$(r + x)^2 = (R + r)^2 + (R + x)^2 - 2(R + r)(R + x) \cdot \frac{b}{R + r},$$

откуда $\quad x = \dfrac{R(R + r - b)}{r + b - R}$

БИЛЕТ 6

1. $x_1 = 6$, $x_2 = -2$

2. $x = \frac{\pi}{7} + \pi n$, $x = \frac{3\pi}{7} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{7} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $-11 < x < -1 - 3\sqrt{11}$, $-\sqrt{79} \leqslant x \leqslant 7$, $\frac{43}{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{79}$, $-1 + 3\sqrt{11} < x < 9$

4. $\frac{3\sqrt{35}}{7}$, $\frac{4\sqrt{35}}{105}$

5. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1 - \sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1 + \sqrt{2}\right)$

6. $R \geqslant r\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\dfrac{R\left(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r - \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}} + R}$

БИЛЕТ 7

1. $x_1 = -3$, $x_2 = 9$

2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{3\pi}{10} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{10} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $-2 < x < \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$, $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$, $\frac{1 + \sqrt{21}}{2} < x < 3$

4. $\frac{\sqrt{15}}{3}$, $\frac{4\sqrt{15}}{45}$

5. $\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

6. $R \geqslant r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$, $\dfrac{R\left(R + r + \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{\sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} + R - r}$

БИЛЕТ 8

1. $x_1 = -6$, $x_2 = 10$

2. $x = -\frac{3\pi}{14} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{14} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{14} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $-\frac{11}{2} < x < -\frac{1}{2} - 2\sqrt{6}$, $-\frac{\sqrt{73}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$, $\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{73}}{2}$, $-\frac{1}{2} + 2\sqrt{6} < x < \frac{9}{2}$

4. $\frac{3\sqrt{35}}{7}$, $\frac{4\sqrt{35}}{105}$

5. $(-1+\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$, $(-1-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

6. $R \geqslant r\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\dfrac{R\left(R-r+\sqrt{R^2-2Rr-\dfrac{r^2}{3}}\right)}{r+R+\sqrt{R^2-2Rr-\dfrac{r^2}{3}}}$

БИЛЕТ 9

1. $x \leqslant -3$, $-2 \leqslant x < \dfrac{-7+\sqrt{13}}{6}$

Решение Область допустимых значений неравенства определяется условием $x^2+5x+6 \geqslant 0$, откуда

$$x \leqslant -3, \qquad x \geqslant -2 \tag{13}$$

На множестве (13) исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$x^2+5x+6 < 1+2\sqrt{x^2+x+1}+x^2+x+1,$$

$$2(x+1) < \sqrt{x^2+x+1} \tag{14}$$

Если $x \leqslant -1$ и выполняются условия (13), то неравенство (14) является верным, и поэтому значения x из промежутков $x \leqslant -3$ и $-2 \leqslant x \leqslant -1$ — решения исходного неравенства

Если левая часть (14) положительна и выполняются условия (13), т е $x > -1$, то неравенство (14) равносильно каждому из неравенств $4(x^2+2x+1) < x^2+x+1$,

$$3x^2+7x+3 < 0 \tag{15}$$

Так как уравнение $3x^2+7x+3=0$ имеет корни $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{13}}{6}$, где $x_1 < -1$, $x_2 > -1$, то решения неравенства (15), удовлетворяющие условию $x > -1$, образуют интервал $-1 < x < x_2$

2. $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi n$, $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Решение Преобразуем левую часть уравнения, пользуясь тем, что

$\cos 4x + \cos 2x = 2\cos 3x \cos x$, $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$,

$\sin 4x - \sin 2x = 2\cos 3x \sin x$, $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$

Получим

$$\frac{2\cos x(\cos 3x + \cos 2x)}{2\sin x(\cos 3x + \cos 2x)}$$

При преобразовании правой части уравнения воспользуемся формулами

$$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$$

Область допустимых значений уравнения определяется условиями

$$\cos 3x + \cos 2x = 2\cos\frac{x}{2}\ \cos\frac{5x}{2} \neq 0, \qquad \sin x \neq 0, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \tag{16}$$

а) Если $\cos 2x \geqslant 0$ и выполняются условия (16), то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\cos x = 2\cos x + 2\sin x, \text{ откуда } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2},$$

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

Значения x, определяемые формулой (17), удовлетворяют условию $\cos 2x \geqslant 0$ и являются решениями исходного уравнения

б) Если $\cos 2x < 0$ и выполняются условия (16), то исходное уравнение равносильно уравнению

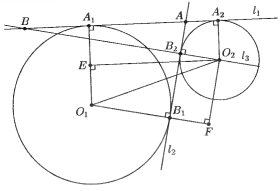
$$\cos x = -2(\cos x + \sin x), \text{ откуда } \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2},$$

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Эти значения x также являются решениями исходного уравнения

3. $A_1A_2 = 8$, $B_1B_2 = 4$, $AB_2 = 2$, $AB = 10$, $BB_2 = 4\sqrt{6}$

Решение Пусть E и F — проекции точки O_2 на прямые O_1A_1 и O_1B_1 соответственно (см рис), $O_1A_1 = O_1B_1 = R$, $O_2A_2 = O_2B_2 = r$, $O_1O_2 = l$ Тогда $O_1E = R - r$, $O_1F = R + r$ и из прямоугольных треугольников O_1EO_2 и O_1FO_2



к задаче 3

находим $A_1A_2 = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \sqrt{70 - (\sqrt{6})^2} = 8$, $B_1B_2 = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} = \sqrt{70 - (3\sqrt{6})^2} = 4$ Обозначим $BB_2 = a$, $AB_2 = b$, $AB = c$ По свойству касательных имеем $AA_1 = AB_1$, $AB_2 = AA_2$, откуда $A_1A_2 - b = B_1B_2 + b$, $8 - b = 4 + b$, $b = 2$ Из подобия треугольников A_2BO_2 и B_2AB следует что $\frac{O_2A_2}{BA_2} = \frac{AB_2}{BB_2}$, т е $\frac{r}{c+b} = \frac{b}{a}$, откуда $c + 2 = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

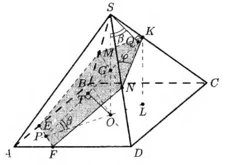
По свойству касательной и секущей, проведенных к окружности C_2 из точки B, имеем

$$a(a+2r) = (c+2)^2 = \frac{3}{2}a^2, \text{ откуда } a = 4\sqrt{6}, \quad c = 10$$

4. 1) $\frac{14}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$, 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$, 3) $\arcsin\frac{3}{5}$

Решение Пусть O — центр основания $ABCD$, Q и T — проекции точек S и O на плоскость EFK, L — проекция точки K на плоскость $ABCD$ (см рис) Так как $EF \parallel BD$ то плоскость EFK пересечет плоскость SBD по прямой MN ($M \in SB$, $N \in SD$), параллельной BD, а в сечении образуется пятиугольник $EMKNF$, составленный из равнобедренной трапеции $EMNF$ ($EM = NF$) и равнобедренного треуголь-

ника MKN $(MK = KN)$ Пусть $AB = a$, $SO = h$, $\angle SAO = \alpha$, тогда $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $h = \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Но $h^2 + \frac{a^2}{4} = 4$, $a^2 = 4$, $a = 2$, $h = \sqrt{3}$



к задаче 4

1) Пусть P — точка пересечения EF и AC, G — точка пересечения SO и PK (G — середина MN), тогда $OP = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $OL = \frac{1}{3}OC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ Из подобия треугольников PGO и PKL следует, что $GO = \frac{2}{3}KL$ где $KL = \frac{2}{3}h$ Поэтому $GO = \frac{4}{9}\sqrt{3}$

Пусть $\angle OPG = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\beta = \frac{GO}{OP} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\beta = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\cos\beta = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $PG = \frac{OP}{\cos\beta} = \frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$, $GK = \frac{1}{2}PG = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ Кроме того $MN = \frac{5}{9}BD = \frac{10\sqrt{2}}{9}$ $EF = \frac{1}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Следовательно площадь сечения

$$\sigma = \frac{1}{2}(EF + MN)PG + \frac{1}{2}MN \ \frac{1}{2}PG = \frac{14}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

2) Пусть φ — угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью EFK, тогда $\sin\varphi = \frac{SQ}{SN}$, где $SQ = SG \ \cos\beta$ $(\angle GSQ = \angle OPG = \beta)$, $SN = SG\frac{1}{\sin\alpha}$ Следовательно, $\sin\varphi = \cos\beta\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$

3) Пусть d — расстояние от точки D до плоскости EFK

Так как прямая BD параллельна плоскости EFK, то $OT = d$, где $OT = OP\sin\beta = \frac{4}{3\sqrt{5}}$

5. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a \leqslant 2$

Решение Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_5(x+\sqrt{2-a}) = \log_5(a-1-x) + \log_5 3, \qquad (18)$$

а уравнение (18) равносильно системе

$$\begin{cases} x+\sqrt{2-a} = 3(a-1-x), \\ a-1 > x, \end{cases}$$

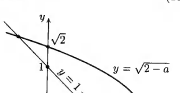
откуда следует неравенство

$$1-a < \sqrt{2-a} \qquad (19)$$

Для решения неравенства (19) построим графики функций $y = 1-a$ и $y = \sqrt{2-a}$ (см рис) Из рисунка видно, что множество решений неравенства (19) — промежуток $(a_1,2]$, где a_1 – корень уравнения

$$1-a = \sqrt{2-a} \qquad (20)$$

такой, что $a_1 < 0$



к задаче 5

Из (20) следует, что $(1-a)^2 = 2-a$ или $a^2 - a - 1 = 0$, откуда $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

6. $(0,0,0)$, $\left(\frac{5}{2}, -5, -\frac{15}{2}\right)$ $(7,-7,-7)$

Решение Вычитая из второго уравнения умноженного на два, первое и третье, получаем

$$y(z-x-2y) = 0 \qquad (21)$$

Уравнение (21) вместе с первыми двумя уравнениями данной системы образует систему, равносильную данной Из (21) следует, что либо $y = 0$, либо

$$z = x + 2y \qquad (22)$$

Если $y = 0$, то $x = 0$, $z = 0$ и $(0, 0, 0)$ — решение исходной системы

Если справедливо равенство (22), то из первых двух уравнений исходной системы получаем

$$\begin{cases} 9x + 2y + xy = 0, & (23) \\ 4x - 3y - y^2 = 0 & (24) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (23), умноженного на 4, уравнение (24), умноженное на 9, находим

$$35y + 4xy + 9y^2 = y(4x + 9y + 35) = 0, \text{ откуда}$$
$$4x = -9y - 35 \qquad (25)$$

Из (24) и (25) следует, что $y^2 + 12y + 35 = 0$, откуда

$$y_1 = -5, \qquad y_2 = -7$$

Если $y = -5$, то из (25) и (22) находим $x = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{15}{2}$, а если $y = -7$, то $x = 7$, $z = -7$

БИЛЕТ 10

1. $x \leqslant -3$, $-1 \leqslant x < \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{8}$

2. $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $AB_1 = 6$, $AB = 12$, $BB_1 = 6\sqrt{3}$

4. 1) $\frac{25}{27}$, 2) $\frac{2\sqrt{2}}{15}$ 3) $\arcsin \dfrac{12}{5\sqrt{17}}$

5. $\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2} < a \leqslant 5$

6. $(0, 0, 0)$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

БИЛЕТ 11

1. $\dfrac{7 - \sqrt{13}}{6} < x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$

2. $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $A_1A_2 = 8$, $B_1B_2 = 4$, $AB_1 = 2$, $AB = \frac{14}{5}$, $BB_1 = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

4. 1) $\frac{5}{3}$, 2) $\frac{2}{5}$, 3) $\arcsin\frac{12}{5\sqrt{10}}$

5. $-\frac{3+\sqrt{17}}{2} < a \leqslant 3$

6. $(0,0,0)$, $(4,12,-4)$, $(1,6,-4)$

БИЛЕТ 12

1. $\frac{1-\sqrt{17}}{8} < x \leqslant 1$, $x \geqslant 3$

2. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $BB_2 = \frac{24\sqrt{3}}{11}$, $AB = \frac{78}{11}$, $AB_2 = 6$

4. 1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$, 2) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. $-5 < a \leqslant 4$

6. $(0,0,0)$, $\left(-\frac{4}{3}, -2, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$